

Ketma-ketlik va funksiya limitlari. Funksiya uzluksizligi

9.1. Sonli ketma-ketlik va uning limiti

Agar o'sish tartibida olingan har bir n natural songa biror qoidaga binoan qandaydir x_n ifoda mos qo'yilgan bo'lsa, uni *ifodalar ketma-ketligi* deyiladi va

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (9.1.1)$$

kabi yoziladi. Bu yerda x_n *ketma-ketlikning n -hadi* deyiladi ($n \in \mathbb{N}$), ba'zan, uni *umumiy had* deb ham yuritiladi. Ketma-ketlik uchun $\{x_n\}$ yoki (x_n) kabi belgilashlar ham qo'llaniladi.

Agar (9.1.1) ketma-ketlikning barcha hadlari sonlardan iborat bo'lsa, uni *sonli ketma-ketlik* deb ataladi. Bu bobda sonli ketma-ketliklar borasida so'z yuritamiz.

Masalan, $2; 4; \dots; 2n; \dots$ (9.1.1a)
juft sonlar ketma-ketligi,

$$1; 3; \dots; 2n-1; \dots \quad (9.1.1b)$$

toq sonlar ketma-ketligi,

$$1; \frac{1}{2}; \dots; \frac{1}{n}; \dots \quad (9.1.1c)$$

natural sonlarga teskari sonlar ketma-ketligi va hokazo.

Sonli ketma-ketliklar ustida ish yuritilganda ularning monotonlik va chegaralanganlik xossalari nazariy jixatdan o'z salmoqlariga egadirlar.

9.1.1-ta'rif. Agar $m < r$ ixtiyoriy natural sonlar uchun sonli $\{x_n\}$ ketma-ketlik hadlari orasida $x_m < x_r$ ($x_m > x_r$) munosabat o'rinli bo'lsa, u *o'suvchi* (*kamayuvchi*) deyiladi.

1-eslatma. Yuqoridagi ta'rifda $x_m < x_r$ ($x_m > x_r$) tengsizlik o'rnida $x_m \leq x_r$ ($x_m \geq x_r$) tengsizlik ishlatilsa, *ketma-ketlik keng ma'noda o'suvchi* yoki *kamaymovchi* (*keng ma'noda kamayuvchi* yoki *o'smovchi*) deyiladi.

2-eslatma. O'suvchi (*kamaymovchi*) ketma-ketlik uchun $x_n - x_{n+1} < 0$ ($x_n - x_{n+1} \leq 0$) tengsizlik, kamayuvchi (*o'smovchi*) ketma-ketlik uchun esa, $x_n - x_{n+1} > 0$ ($x_n - x_{n+1} \geq 0$) tengsizlik $\forall n \in \mathbb{N}$ bo'lganda o'rinli bo'lishi zarur va etarli shart ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

9.1.2-ta'rif. O'suvchi va kamayuvchi (*kamaymovchi* va *o'smovchi*) ketma-ketliklarni *monoton* (*keng ma'noda monoton*) *ketma-ketliklar* deb ataladi.

Yuqorida keltirilgan (9.1.1a) va (9.1.1b) lar o'suvchi, (9.1.1c) esa kamayuvchi ketma-ketlikga misollardir, ular (uchchalasi ham) monotondir.

Haqiqatdan ham, (9.1.1a) uchun $x_n = 2n$ bo'lganidan $x_{n+1} = 2(n+1) = 2n+2$, ya'ni $x_n - x_{n+1} = -2 < 0$ ekanligi kelib chiqadi. (9.1.1b) uchun ham shunga o'xshash holat kuzatiladi, agar (9.1.1c) ni olsak, unda

$$x_n = \frac{1}{n} \text{ bo'lib, } x_{n+1} = \frac{1}{n+1} ; x_n - x_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0,$$

demak, (9.1.1a) va (9.1.1b) lar o'suvchi, (9.1.1c) esa kamayuvchi ketma-ketlik ekan.

9.1.3-ta'rif. Agar berilgan $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik uchun shunday M (m) o'zgarmas son mavjud bo'lsaki, uning har bir hadi shu sondan katta (kichik) bo'lmasa,

ya'ni $\forall n \in N, x_n \leq M$ ($x_n \geq m$) bo'lsa, bu sonli ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi, M (m) son uning yuqori (quyi) chegarasi deb ataladi.

9.1.4-ta'rif. Ham quyidan ham yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik chegaralangan ketma-ketlik deyiladi.

Masalan, (9.1.1a) va (9.1.1b) lar quyidan chegaralangan, ammo, yuqoridan chegaralanmagan ketma-ketliklar ekanligini ko'rish qiyin emas. Agar (9.1.1c) ni olsak, u ham yuqoridan ham quyidan chegaralangandir, ya'ni uning ixtiyoriy hadi uchun

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1$$

o'rinlidir. Demak, (9.1.1c) chegaralangan ketma-ketlikdir.

9.1.5-ta'rif. Agar berilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun biror a son mavjud bo'lib, ixtiyoriy olingan musbat ε son uchun shunday n_0 natural son topilsaki, $\forall n_0 < n \in N$ bo'lganda $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va

$$x_n \rightarrow a \text{ yoki } \lim x_n = a \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \right)$$

kabi yoziladi.

Masalan, yuqoridagi ta'rif bo'yicha

$$\lim \frac{n-1}{n+1} = 1$$

ekanligini isbotlaylik. Buning uchun ixtiyoriy musbat ε son berilganda ta'rifda aytilgan n_0 natural son topilishini ko'rsatish kifoya.

$$\left| \frac{n-1}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{2}{n+1} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$$

ε - ixtiyoriyligidan $\frac{2}{\varepsilon} - 1 > 0$ bo'ladigan qilib olish mumkin ($\varepsilon < 2$ deb olinsa kifoya). Endi,

$n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon} - 1 \right] + 1$ deb olsak, yuqoridagi tengsizlik $\forall n_0 < n \in N$ uchun bajarilishi kelib

chiqadi. Masalan, $\varepsilon = 0,001$ desak, $n_0 = \left[\frac{2}{0,001} - 1 \right] + 1 = [2000 - 1] + 1 = 2000$.

$[x]$ yozuv x sonining butun qismini anglatishini eslatamiz.

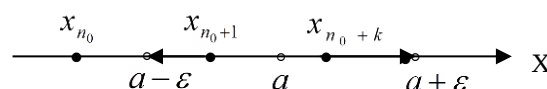
3-eslatma. Agar x o'zgaruvchi o'zining o'zgarishi jarayonida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning hadlarini navbatma-navbat qabul qilib borsa, uni *varianta* deb ataydilar va bu holda yuqorida kiritilgan ketma-ketlik limitini *varianta limiti* deb ham yuritiladi.

4-eslatma. Chekli limiti mavjud bo'lgan ketma-ketlikni *yaqinlashuvchi*, aks holda esa uni *uzoqlashuvchi* deb ataladi.

Yuqorida keltirilgan ketma-ketlik limitining ta'rifini geometrik nuqtai-nazarda quyidagicha talqin qilish mumkin. Agar $x_n \rightarrow a$ bo'lsa, u vaqtda, $\forall \varepsilon > 0$ uchun n_0 natural son topilib,

$$\forall n_0 < n \in N, |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

bo'lib, bu sonlar o'qida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $\forall n_0 < n \in N$ bo'lgan barcha x_n hadlari a nuqtaning ε atrofida yotishi kelib chiqadi (9.1.1-rasm).



9.1.1-rasm.

9.1.1-teorema. (Limitning mavjudligi haqidagi 1-teorema). 1) Har qanday kamayuvchi (o'smovchi) va quyidan biror A son bilan chegaralangan ketma-ketlik chekli limitga ega bo'ladi va bu limit A dan kichik bo'lmaydi; 2) Har qanday o'suvchi (kamaymovchi) va yuqoridan biror B son bilan chegaralangan ketma-ketlik chekli limitga ega bo'ladi va bu limit B dan katta bo'lmaydi.

Isbot. Aytaylik, $\{x_n\}$ yuqoridan B son bilan chegaralangan o'suvchi (kamaymovchi) ketma-ketlik bo'lsin. U vaqtda, $\{x_n\}$ sonli to'plamning aniq yuqori chegarasi $B_0 = \sup\{x_n\}$ mavjuddir. Tabiiyki, $B_0 \leq B$ bo'ladi. Aniq yuqori chegara ta'rifiga ko'ra $\forall \varepsilon > 0$ uchun $\{x_n\}$ to'plamning shunday x_{n_0} elementi mavjud bo'ladiki, $B_0 - \varepsilon < x_{n_0} \leq B_0$ bajariladi. Bundan va $\{x_n\}$ o'suvchi (kamaymovchi) ekanligidan $\forall n_0 < n \in N$ uchun $B_0 - \varepsilon < x_n \leq B_0$ bo'lib, $|x_n - B_0| < \varepsilon$, ya'ni $\lim x_n = B_0$ kelib chiqadi.

Demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chekli limiti mavjud va u $\{x_n\}$ ning aniq yuqori chegarasiga teng hamda $\lim x_n = B_0 \leq B$ ekan.

Xuddi shunga o'xshash, kamayuvchi (o'smovchi) quyidan chegaralangan ketma-ketlikning chekli limitining mavjudligi va u ketma-ketlikning aniq quyi chegarasiga tengligi isbotlanadi.

1-misol. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ketma-ketlikni qaraylik, uning kamayuvchi ekanligini yuqorida ko'rsatgan edik, undan tashqari, $\forall n \in N$ uchun $\frac{1}{n} > 0$ ekanligini payqash qiyin emas. Demak, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ kamayuvchi va 0 soni bilan quyidan chegaralangandir.

Demak, $\lim \frac{1}{n} = a$ mavjud hamda $a \geq 0$ ekanligi yuqoridagi teoremdan kelib chiqadi. Bu o'rinda, $\inf \frac{1}{n} = 0$ ekanligidan

$$\lim \frac{1}{n} = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

2-misol. $\left\{\frac{2n+1}{n}\right\}$ ketma-ketlikni olsak, $\forall n \in N$ uchun

$$x_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n} > 2$$

bo'lib,

$$x_n - x_{n+1} = \left(2 + \frac{1}{n}\right) - \left(2 + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n(n+1)} > 0.$$

Ya'ni kamayuvchi va quyidan 2 soni bilan chegaralangan ketma-ketlikka egamiz, demak, uning chekli limiti mavjuddir va bu limit 2 dan kichik emas.

$$\lim \frac{2n+1}{n} = 2$$

ekanligini isbotlashni o'quvchiga qoldiramiz.

3- misol. $\left\{\frac{n^2-1}{n^2}\right\}$ ni qaralsa, $\forall n \in N$ uchun

$$x_n = \frac{n^2-1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n^2} < 1;$$

$$x_n - x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{-2n-1}{n^2(n+1)^2} < 0.$$

Demak, u o'suvchi va yuqoridan 1 soni bilan chegaralanganligi uchun chekli limiti mavjud.

$$\lim \frac{n^2-1}{n^2} = 1$$

bo'lishiga ishonch hosil qiling.

4- misol. $\{x_n\}$ da $x_n = c$ (c- o'zgarmas) bo'lsa, $c \leq x_n \leq c$ deyish mumkin. Demak, bu holda ketma-ketlik ham kamaymovchi ham o'smovchi ekanligidan uning chekli limiti mavjud va $c \leq \lim x_n \leq c$, ya'ni o'zgarmasning limiti o'ziga tengligi kelib chiqadi:

$$\lim c = c.$$

9.1.2-teorema (Limitning mavjudligi xaqidagi ikkinchi teorema). Agar $\{x_n\}, \{y_n\}$ va $\{z_n\}$ ketma-ketliklar uchun biror m_0 nomerdan boshlab,

$$\forall n > m_0, \quad x_n \leq y_n \leq z_n$$

o'rinli va $\lim x_n = \lim z_n = a$ chekli limit mavjud bo'lsa, $\lim y_n$ chekli limit ham mavjud va $\lim y_n = a$ bo'ladi.

Isbot. Teorema shartlari bajarilsin, u vaqtda, $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday n_1 va n_2 nomerlar topiladi.

$$\forall n_1 < n \in N, \quad |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$\forall n_2 < n \in N, \quad |z_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$$

bajariladi. Agar $n_0 = \max\{n_1; n_2; m_0\}$ desak, $\forall n_0 < n \in N$ uchun

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon,$$

ya'ni $\lim y_n = a$ ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

9.1.3-teorema (Bir-birining ichiga joylashgan kesmalar haqidagi). Agar $\{[a_n; b_n]\}$ kesmalar ketma-ketligi uchun

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$$

o'rinli, ya'ni ular bir-birining ichiga joylashgan bo'lib, $b_n - a_n \rightarrow 0$, ya'ni kesmalar uzunligining limiti nolga teng bo'lsa, barcha kesmalar uchun yagona umumiy c nuqta mavjud va

$$\lim a_n = \lim b_n = c$$

bo'ladi.

Isbot. $\forall n \in N$ uchun $a_n \leq b_1$ va $b_n \geq a_1$ bo'lib, $a_n \leq a_{n+1}$ va $b_n \geq b_{n+1}$ ekanligidan $\lim a_n$ va $\lim b_n$ chekli limitlarning mavjudligi 9.1.1-teoremadan kelib chiqadi. Shu bilan birga

$$\lim(b_n - a_n) = 0 \Rightarrow \lim a_n = \lim b_n = c$$

o'rinli bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. Undan tashqari

$$\forall n \in N, \quad a_n \leq c, \quad b_n \geq c, \quad \Rightarrow \quad c \in [a_n; b_n]$$

Bu c nuqta barcha kesmalar uchun yagona umumiy nuqtadir. Agar shunday boshqa c_0 nuqta ham mavjud deb faraz qilinsa,

$$c = \sup\{a_n\}, \quad c = \inf\{b_n\}$$

ekanligidan, agar $c_0 < c$ bo'lsa, $c_0 < c - \varepsilon$ ($\varepsilon = c - c_0 > 0$) uchun $a_{n_0} > c_0$ mavjud bo'lib, bundan

$$c_0 \notin [a_{n_0}; b_{n_0}]$$

ekanligi kelib chiqadi, buning esa bo'lishi mumkin emasdir. Xuddi shunga o'xshash, $c_0 > c$ hol ham qaraladi. Demak, aytilgan c nuqta yagona ekan.

9.1.6-ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lib, undan $k \in N, n_k \in N, n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ shart asosida $\{x_{n_k}\}$ ketma-ketlik ajratib olingan bo'lsa, uni berilgan ketma-ketlikning *qisman ketma-ketligi* deyiladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, agar ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, uning ixtiyoriy qisman ketma-ketligi ham yaqinlashuvchi bo'lib, u ham asosiy ketma-ketlik limitiga ega bo'ladi. Lekin, buning aksinchasi hamma vaqt ham o'rinli bo'lavermaydi.

9.1.4-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lsa, undan yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\}$ qisman ketma-ketlikni ajratib olish mumkin.

Isbot $a = \inf\{x_n\}$ va $b = \sup\{x_n\}$ mavjud bo'lib, $\forall n \in N \quad x_n \in [a; b]$ bo'lishi ravshandir. $[a; b]$ ni $\frac{b-a}{2}$ nuqta yordamida teng ikkiga bo'lamiz. Bu kesmalardan aqalli bittasida ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari joylashadi, o'shanisini $[a_1; b_1]$ deb olamiz va unga tegishli bo'lgan ketma-ketlikning bitta x_{n_1} hadini olamiz, ya'ni $x_{n_1} \in [a_1; b_1]$; yuqoridagi jarayonni $[a_1; b_1]$ kesma uchun takrorlash natijasida $[a_2; b_2]$ kesmaga va oldin tanlangan x_{n_1} dan farqli hamda $n_2 > n_1$ bo'lgan $\{x_n\}$ ning hadini tanlab, $x_{n_2} \in [a_2; b_2]$ ga ega bo'lamiz. Va hokazo, bu jarayonni cheksiz takrorlab borish natijasida $\{x_{n_k}\}$ qisman ketma-ketlikka (bunda $x_{n_k} \in [a_k; b_k]$) va

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_k; b_k] \supset \dots,$$

ya'ni bir-birining ichiga joylashgan kesmalar sistemasiga hamda ularning uzunliklari uchun $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$ ga ega bo'lamiz. Bundan $\lim(b_k - a_k) = 0$ bo'lishi aniqdir. Demak, 9.1.3-teoremaga ko'ra kesmalar uchun umumiy yagona c nuqta mavjud va $\lim a_k = \lim b_k = c$ dir. Undan tashqari, $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ ekanligidan

$$\lim x_{n_k} = c$$

bo'lishi 9.1.2-teoremadan kelib chiqadi, ya'ni $\{x_{n_k}\}$ yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlikdir. Teorema isbotlandi.

9.1.7-ta'rif (Koshi mezoni). Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda shunday $n_0 \in N$ mavjud bo'lsaki, $\forall n_0 < n \in N$ va $\forall n_0 < m \in N$ uchun

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ *fundamental ketma-ketlik* deyilib, u *Koshi shartini qanoatlantiradi* deb ham ataladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim x_n = a$ bo'lsa, uning fundamental ekanligi

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a|$$

tengsizlik yordamida osongina isbotlanadi.

Fundamental ketma-ketlik chegaralangan bo'lishini isbotlash ham qiyinchilik tug'dirmaydi. Shu bilan birga, quyidagi tasdiq ham o'rinlidir.

9.1.5-teorema. $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning fundamental bo'lishi zarur va etarlidir.

Isboti Koshi mezonini qanoatlantiruvchi ketma-ketlik chegaralangan bo'lishidan yuqoridagi teoremani qo'llash natijasida olinadi (o'quvchiga mustaqil ravishda isbotlashni tavsiya qilamiz).

Bu teoremaning tatbiqi sifatida umumiy hadi $x_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$ dan iborat bo'lgan $\{x_n\}$, ya'ni $0, 1, 0, 1, \dots$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi emasligini ko'rsatamiz.

$\forall \varepsilon > 0$ berilganda $\forall n \in N$ uchun

$$|x_{n+1} - x_n| = 1$$

ekanligi ravshandir. Endi, $0 < \varepsilon < 1$ deb faraz qilsak, n har qancha katta olinganda ham

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilmasligi aniqdir. Bu ketma-ketlik uchun Koshi sharti bajarilmas ekan. Demak, u uzoqlashuvchidir.

9.3. Funksiyaning limiti

9.3.1-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya a quyuqlik (limitik) nuqtasiga ega bo'lgan D sohada aniqlangan (a ning o'zida shart emas) va biror b son mavjud bo'lib,

$\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday musbat δ son topilsaki, $0 < |x - a| < \delta$ munosabatni qanoatlantiruvchi $\forall x \in D$ uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow a$ dagi (yoki a nuqtadagi) limiti deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad (9.3.1)$$

ko'rinishda yoziladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, (9.3.1) mavjud bo'lsa, $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta(\varepsilon) > 0$ topiladiki, x argument a nuqtaning δ -yaqin atrofidan D ga tegishli qiymat olganda funksiya qiymatlari b nuqtaning ε atrofida bo'ladi.

Boshqacha aytganda, bu atrofda funksiya grafigi ε bo'lgan o'qi $y=b$ to'g'ri chiziqdan iborat yo'l ichida yotadi (9.3.1- rasm).

Misol tariqasida $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 1) = 1$

ekanligini ko'rsataylik. Bu yerda

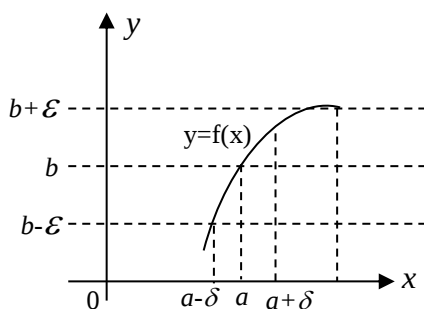
$f(x) = 2x^2 - 1$ ning aniqlanish sohasi R dir.

$\forall \varepsilon > 0$ ni olaylik,

$$|(2x^2 - 1) - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x^2 - 2| < \varepsilon \Rightarrow 2|x+1||x-1| < \varepsilon. \quad (9.3.2)$$

Bu yerda $x \rightarrow 1$, ya'ni $x=1$ nuqta yaqin atrofini qarayotganligi sababli $x \in [0;1) \cup (1;2]$ desak bo'ladi. U vaqtda, agar

$$2 \cdot (2+1) \cdot |x-1| < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{6}$$



9.3.1-rasm.

tengsizlik bajarilsa, (9.3.2) albatta bajariladi. Demak, $\delta = \min \left\{ 1; \frac{\varepsilon}{6} \right\}$ deb olsak, $0 < |x-1| < \delta$ bo'lganda (9.3.2) bajariladi. Ya'ni $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 1) = 1$ ekanligi kelib chiqadi.

1-eslatma. Agar funksiyaning a nuqtadagi limiti ta'rifida $0 < |x-a| < \delta$ munosabat o'rnida $0 < x-a < \delta$ ($-\delta < x-a < 0$) ishlatilsa, funksiyaning a nuqtadagi o'ng (chap) limiti ta'rifini olamiz. $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi o'ng (chap) limiti uchun

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x), f(a+0) \left(\lim_{x \rightarrow a-0} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x), f(a-0) \right)$$

belgilashlar ishlatiladi.

Shuni ham aytishimiz lozimki, funksiyaning a nuqtadagi chekli limiti mavjud bo'lishi uchun $f(a+0)$ va $f(a-0)$ chekli o'ng va chap limitlar mavjud hamda ular teng bo'lishi zarur va etarlidir:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a+0) = f(a-0).$$

2-eslatma. Agar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ chekli limit mavjud bo'lsa, x argumentning x_0 ga yaqinlashuvchi va x_0 nuqtaning yaqin atrofidan olingan $f(x)$ funksiya aniqlangan $\{x_n\}$ ketma-ketligiga mos keluvchi $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\lim f(x_n) = b$$

ekanligi kelib chiqadi. Buning aksinchasi ham o'rinlidir, ya'ni x_0 nuqtaning yaqin atrofidan olingan $f(x)$ aniqlangan va x_0 ga yaqinlashuvchi har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketliklar uchun $\{f(x_n)\}$ ketma-ketliklarning barchasi yaqinlashuvchi bo'lsa, ular bitta b limitga ega, ya'ni $\lim f(x_n) = b$ tenglik o'rinli bo'lib, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi chekli limiti mavjud va

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$$

bo'ladi.

9.3.2-ta'rif. Agar a son $f(x)$ funksiya aniqlanish sohasi bo'lgan D to'plamning limitik nuqtasi bo'lib, $\forall \varepsilon > 0$ olinganda shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ munosabatlarni qanoatlantiruvchi D ga tegishli barcha x'' , x' nuqtalar uchun $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada *Koshi shartini* qanoatlantiradi deyiladi.

Bu ta'rif funksiya uchun *Koshi mezonidir*.

9.3.1-teorema. $f(x)$ funksiya chekli a nuqtada chekli limitga ega bo'lishi uchun shu nuqtada *Koshi shartini* qanoatlantirishi zarur va etarlidir.

Isbot. Zarurligi. Agar $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ chekli limit mavjud bo'lsa, funksiya limitining ta'rifiga ko'ra, $\forall \varepsilon > 0$ berilganda shunday $\delta > 0$ topiladiki, $0 < |x-a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\forall x \in D$ nuqtalar uchun $|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajariladi. U vaqtda, $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ munosabatlarni qanoatlantiruvchi D ga tegishli $\forall x''$, x' nuqtalarni olsak,

$$|f(x'') - f(x')| \leq |f(x'') - b| + |b - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

kelib chiqadi.

Yetarliligi. $f(x)$ funksiya a nuqtada Koshi shartini qanoatlantirsin. D to'plamdan a ga yaqinlashuvchi biror $\{x_n\}$ ketma-ketlikni olaylik, u vaqtda $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik Koshi shartini (mezonini) qanoatlantirib, uning chekli limiti mavjuddir. $\lim f(x_n) = b$ deb faraz qilsak, $\forall \varepsilon > 0$ bo'lganda shunday $n_0 \in N$ va $\delta > 0$ son topiladiki, $\forall x, x_n \in D, n_0 < n \in N, 0 < |x - a| < \delta, 0 < |x_n - a| < \delta$ munosabatlar bajarilganda

$|f(x_n) - b| < \frac{\varepsilon}{2}, |f(x_n) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ o'rinli bo'lib,

$$|f(x) - b| \leq |f(x_n) - b| + |f(x_n) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

kelib chiqadi. Bu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bo'lishini ko'rsatadi. Teorema to'liq isbotlandi.

9.3.3-ta'rif (Argument cheksizga intilgandagi funksiya limiti). Agar $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasida absolut qiymati jixatidan ixtiyoriy musbat sondan ham katta nuqtalar (sonlar) mavjud bo'lib, ixtiyoriy olingan musbat ε son uchun shunday musbat M sonni topish mumkin bo'lsaki, argumentning $|x| > M$ munosabat o'rinli bo'ladigan funksiya aniqlanish sohasiga tegishli qiymatlarida

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiya $x \rightarrow \infty$ dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

ko'rinishda yoziladi.

Bu ta'rifda $|x| > M$ ni $x > M$ bilan almashtirilsa, funksiyaning $x \rightarrow +\infty$ dagi; agar $x < -M$ bilan almashtirilsa, $x \rightarrow -\infty$ dagi limitning ta'riflari kelib chiqadi. Mos ravishda quyidagi yozuvlar o'rinli:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \text{ yoki } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

Misol. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+3}{x} = 5$ ni isbot qiling.

Isbot. $f(x) = \frac{5x+3}{x}$, $b = 5$ va $f(x)$ funksiya $x \neq 0$ bo'lgan barcha nuqtalarda aniqlangan. Ixtiyoriy musbat ε son olamiz va $f(x) - b$ ayirmaning absolut qiymatini qaraymiz:

$$|f(x) - b| = \left| \frac{5x+3}{x} - 5 \right| = \left| \frac{3}{x} \right| = \frac{3}{|x|}$$

Bu ayirma ε dan kichik bo'lishi, ya'ni

$$\left| \frac{5x+3}{x} - 5 \right| = \frac{3}{|x|} < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilishi uchun $|x| > \frac{3}{\varepsilon}$ bo'lishi yetarli.

Bundan limitning 9.3.3- ta'rifida ko'rsatilgan M son $M = \frac{3}{\varepsilon} > 0$ bo'lishini olamiz.

Shunday qilib, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+3}{x} = 5$ ekan.

Izoh. Agar D sonli to'plamning $\forall M > 0$ olinganda $|x| > M$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x elementi mavjud bo'lsa, ∞ uning quyuqlik (limitik) nuqtasi deb qabul

qilinadi. Shuningdek, yuqoridagi $|x| > M$ o'rnida $x > M, (-x > M)$ tengsizlik ishlatilsa, $+\infty(-\infty)$ limitik nuqta tushunchasiga kelamiz.

3-eslatma. Agar 9.3.2-ta'rifda $a = \infty$ deb faraz qilinsa, $0 < |x' - a| < \delta \wedge 0 < |x'' - a| < \delta$ munosabatlar $|x'| > \delta \wedge |x''| > \delta$ larga almashadi.

9.4 Funksiya limitining asosiy xossalari

9.4.1-ta'rif. Agar x_0 $f(x)$ funksiya aniqlanish sohasining quyuqlik (limitik) nuqtasi bo'lib, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ bo'lsa, uni x_0 nuqtada *cheksiz kichik funksiya* yoki *cheksiz kichik miqdor* deyiladi.

9.4.2-ta'rif. Agar x_0 $\varphi(x)$ funksiya aniqlanish sohasining limitik nuqtasi bo'lib, ixtiyoriy olingan musbat M son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argumentning $0 < |x - x_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi va funksiya aniqlanish sohasidan olingan barcha qiymatlarida

$$|\varphi(x)| > M$$

bajarilsa, u x_0 nuqtada *cheksiz katta funksiya (miqdor)* deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$$

ko'rinishda yoziladi. Bu holda *shartli ravishda funksiya cheksiz limitga ega* deb ham yuritiladi.

Xuddi yuqoridagidek, agar $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ bo'lsa, $f(x)$ $x \rightarrow \infty$ da *cheksiz kichik funksiya*; $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ bo'lsa, $\varphi(x)$ $x \rightarrow \infty$ da *cheksiz katta funksiya* deb ataladi.

Bu yerda ham cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar orasida ketma-ketliklardagi kabi bog'lanish mavjud ekanligini, ya'ni birining teskari qiymati ikkinchisidan iborat bo'lishini aytamiz.

1-eslatma. $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty(\pm\infty),$

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty(\pm\infty), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

yozuvlarning ma'nolari haqida fikrlab ko'rishni o'quvchining o'ziga tavsiya qilamiz.

Ketma-ketliklar uchun ko'rilgan limitning barcha xossalari bu yerda ham o'z kuchida qoladi. Ulardan ba'zilarini keltiramiz.

1⁰. Agar $f_i(x)$ ($i=1, 2, \dots, n$) funksiyalar x_0 ning yetarlicha yaqin atrofida aniqlanish sohalari bir xil qismaniy to'plamga ega bo'lgan holda bu nuqtada ularning chekli limitlari mavjud bo'lsa,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{i=1}^n f_i(x) = \sum_{i=1}^n \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \prod_{i=1}^n f_i(x) = \prod_{i=1}^n \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x)$$

o'rinalidir.

2⁰. Agar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ chekli limit mavjud va $b \neq 0$ bo'lsa, $x = x_0$ nuqtaning shunday yaqin atrofi mavjud bo'ladiki, argument qiymati undan va funksiya yaqinlanish sohasiga

tegishli qilib olinganda $f(x)$ ning ishorasi b ning ishorasi bilan bir xil bo'ladi, xatto aytilgan yaqin atrofni toraytirish hisobiga $|f(x)| > \frac{|b|}{2}$ ni o'rinli qilish mumkin.

3⁰. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar x_0 nuqtaning yetarlicha yaqin atrofida bir xil qismaniy aniqlanish sohaga ega va bu nuqtada ularning chekli limitlari mavjud bo'lib, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0$ bo'lsa,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}$$

o'rinlidir.

4⁰. Agar $\varphi(x)$ funksiya x_0 nuqta yaqin atrofida aniqlangan bo'lib, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = z_0$ chekli limit mavjud va $f(z)$ funksiya z_0 nuqta yaqin atrofida aniqlangan bo'lib, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = b$ chekli limit mavjud bo'lsa, $f[\varphi(x)]$ murakkab funksiyaning x_0 nuqtadagi chekli limiti mavjud bo'lib, $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = b$ o'rinli bo'ladi, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = z_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z).$$

2-eslatma. Keltirilgan bu xossalardagi shartlar faqat yetarli shartlar bo'lib, ular zaruriy emasdir. Masalan, $\chi(x)$ Dirixle funksiyasini olsak (8.4-va 8.5-bandlarga qarang), uning birorta ham nuqtada limiti mavjud emasligi ravshandir. Endi,

$$\bar{\chi}(x) = \begin{cases} 0, & x \in Q, \\ 1, & x \in J \end{cases}$$

funksiyani qarasak, u birorta nuqtada ham limitga ega bo'lmagan funksiya. Ammo,

$$\chi(x) + \bar{\chi}(x) = 1, \quad \chi(x) \cdot \bar{\chi}(x) = 0,$$

$$\chi[\bar{\chi}(x)] = 1, \quad \bar{\chi}[\chi(x)] = 0$$

funksiyalar o'zgarmaslardan iborat bo'lib, ular ixtiyoriy x_0 nuqtada chekli limiti mavjuddir.

5⁰. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning limitlari (chekli yoki cheksiz) ma'lum bo'lsa, u vaqtda yettita shartli

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0 \cdot \infty; \infty - \infty; 0^0; \infty^0; 1^\infty \quad (9.4.1)$$

simvollar bilan tavsiflanadiganlardan boshqa hamma hollarda

$$f(x) \pm g(x); \quad f(x) \cdot g(x); \quad \frac{f(x)}{g(x)}; [f(x)]^{g(x)} \quad (9.4.2)$$

ifodalarning limitlarini hisoblashda yuqorida keltirilgan funksiya limitining xossalariidan foydalanish mumkin. Bu (9.4.1) yettita simvollar bilan tavsiflangan hollarda esa (9.4.2) ifodalar *aniqmasliklarni* bildiradi. Bunday aniqmasliklarni ochish uchun $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning limitlarini bilishning o'zi yetarli bo'lmay, bu funksiyalarning o'zgarish qonunlarini ham hisobga olishga to'g'ri keladi.

Misollar:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} x^3 \text{ topilsin.}$$

Ko'paytmaning limiti haqidagi xossani qo'llasak:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = \lim_{x \rightarrow 2} (x \cdot x \cdot x) = \lim_{x \rightarrow 2} x \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ topilsin.

Bu yerda maxrajning limiti nolga teng bo'lgani uchun bo'linmaning limiti haqidagi xossani qo'llab bo'lmaydi.

Bundan tashqari, kasr suratining limiti ham nolga teng bo'lgani uchun berilgan ifoda $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikdir. Bu limit ostidagi kasrning surati

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

bo'lgani uchun, $x \rightarrow 2$ da $x - 2 \neq 0$ ekanligini e'tiborga olib,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 3) = -1$$

ga ega bo'lamiz.

6⁰. Biror $(a; b)$ oraliqda aniqlangan va monoton (keng manoda bo'lishi ham mumkin) funksiya uchun $f(b-0)$ – chekli yoki $\pm\infty$; $f(a+0)$ – chekli yoki $\mp\infty$ limitlar (∞ oldidagi yuqori ishora funksiya kamaymovchi, quyi ishora esa o'smovchi bo'lgan holga to'g'ri keladi); undan tashqari, $\forall x_0 \in (a; b)$ uchun $f(x_0+0)$ va $f(x_0-0)$ chekli limitlar mavjud hamda $f(x_0-0) \leq f(x_0) \leq f(x_0+0)$ ($f(x_0-0) \geq f(x_0) \geq f(x_0+0)$) o'rinalidir.

Bularning isboti monoton ketma-ketlikning chekli yoki cheksiz limitining mavjudligidan kelib chiqadi.